5th MIDDLE EUROPEAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

VARAŽDIN 2011 CROATIA

language: Croatian

5. Srednjoeuropska matematička olimpijada

Pojedinačno natjecanje

3. rujna 2011.

Zadatak I-1.
Na početku je samo broj 44 napisan na ploči. Cijeli broj a na ploči može se zamijeniti s četiri međusobno različita cijela broja a_1, a_2, a_3, a_4 čija je aritmetička sredina, $\frac{1}{4}(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)$, jednaka a. U jednom koraku istodobno mijenjamo sve cijele brojeve na ploči na prethodno opisani način. Nakon 30 koraka ostane $n = 4^{30}$ cijelih brojeva $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Dokaži da je

$$\frac{b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2}{n} \geq 2011\,.$$

Zadatak I-2.
Neka je $n \geq 3$ prirodan broj. Ivan i Marija igraju sljedeću igru: najprije Ivan označi stranice pravilnog n-terokuta brojevima $1, 2, \ldots, n$ na koji god način želi, koristeći svaki broj točno jednom. Tada Marija dijeli n-terokut na trokute s $n-3$ dijagonale koje se ne sijeku u njegovoj unutrašnjosti. Sve te dijagonale označene su s brojem 1. U svaki od trokuta upisan je umnožak brojeva na njegovim stranicama. Neka je S zbroj tih $n-2$ umnožaka.

Odredi vrijednost od S ako Marija želi da je S najmanji mogući, a Ivan želi da je S najveći mogući i oboje postupaju optimalno.

Zadatak I-3.
U ravnini su dane kružnice $\mathcal{K}_1$ i $\mathcal{K}_2$ sa središtima I_1 i I_2, redom, koje se sijeku u točkama A i B. Pretpostavimo da je kut $\sphericalangle I_1AI_2$ tup. Tangenta na $\mathcal{K}_1$ u točki A siječe $\mathcal{K}_2$ i u točki C, a tangenta na $\mathcal{K}_2$ u točki A siječe $\mathcal{K}_1$ i u točki D. Neka je $\mathcal{K}_3$ opisana kružnica trokuta BCD. Neka je E polovište luka $\widehat{CD}$ kružnice $\mathcal{K}_3$ koji sadrži B. Pravci AC i AD sijeku $\mathcal{K}_3$ i u točkama K i L, redom. Dokaži da je pravac AE okomit na KL.

Zadatak I-4.
Neka su k i m, $k > m$, prirodni brojevi takvi da je $km(k^2 - m^2)$ djeljiv s $k^3 - m^3$. Dokaži da je $(k-m)^3 > 3km$.

Vrijeme: 5 sati
Vrijeme za postavljanje pitanja: 45 min
Svaki zadatak vrijedi 8 bodova.
Redoslijed zadataka ne odražava njihovu težinu.