5th MIDDLE EUROPEAN MATHEMATICAL OLYMPIAD
VARAŽDIN 2011 CROATIA

language : French

5. Olympiade de Mathématiques d'Europe Centrale

Compétition individuelle

3. Septembre 2011

Problème I-1.
Initialement, seul l'entier 44 est écrit sur un tableau. Un entier a, écrit sur ce tableau, peut être remplacé par quatre entiers différents a_1, a_2, a_3, a_4 tels que la moyenne arithmétique $\frac{1}{4}(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)$ des quatres nouveaux entiers est égale au nombre a. Une étape consiste à remplacer simultanément tous les entiers écrits sur le tableau selon la méthode décrite ci-dessus. Après 30 étapes, on s'arrête avec $n = 4^{30}$ entiers $b_1, b_2, \ldots, b_n$ sur le tableau. Prouver que

$$\frac{b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2}{n} \geq 2011\,.$$

Problème I-2.
Soit $n \geq 3$ un entier. Jean et Marie jouent au jeu suivant. Au début, Jean numérote les côtés d'un n-gone régulier avec les nombres $1, 2, \ldots, n$ dans l'ordre qu'il veut, en utilisant chaque nombre exactement une fois. Ensuite Marie découpe ce n-gone en triangles, en dessinant $n-3$ diagonales qui ne se coupent pas l'une l'autre à l'intérieur du n-gone. Toutes ces diagonales sont numérotées par le nombre 1. A l'intérieur de chaque triangle, on écrit le produit des nombres situés sur les côtés de ce triangle. Soit S la somme de ces $n-2$ produits.

Déterminer la valeur de S si Marie veut que le nombre S soit le plut petit possible et si Jean veut que S soit le plus grand possible et s'ils font tous les deux les meilleurs choix possibles.

Problème I-3.
Dans un plan, les cercles $\mathcal{K}_1$ et $\mathcal{K}_2$ de centre I_1 et I_2, respectivement, se coupent en deux points A et B. On suppose que $\angle I_1AI_2$ est obtu. La tangente à $\mathcal{K}_1$ en A coupe $\mathcal{K}_2$ une deuxième fois en C et la tangente à $\mathcal{K}_2$ en A coupe $\mathcal{K}_1$ une deuxième fois en D. Soit $\mathcal{K}_3$ le cercle circonscrit au triangle BCD. Soit E le milieu de l'arc CD de $\mathcal{K}_3$ qui contient B. Les droites AC et AD coupent $\mathcal{K}_3$ une deuxième fois en K et L, respectivement. Prouver que la droite AE est perpendiculaire à la droite KL.

Problème I-4.
Soit k et m, avec $k > m$, deux entiers positifs tels que le nombre $km(k^2 - m^2)$ est divisible par $k^3 - m^3$. Prouver que $(k-m)^3 > 3km$.

Durée: 5 heures
Temps pour les questions: 45 min
Chaque problème vaut 8 points.
L'ordre des problèmes ne dépend pas de leur difficulté.