



5. Mitteleuropäische Mathematik-Olympiade

EINZELWETTBEWERB

3. SEPTEMBER 2011

Aufgabe I-1.

Zu Beginn steht nur die Zahl 44 an der Tafel. Eine Zahl a an der Tafel kann durch vier paarweise verschiedene ganze Zahlen a_1, a_2, a_3, a_4 ersetzt werden, sodass deren arithmetisches Mittel $\frac{1}{4}(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)$ gleich der Zahl a ist. In einem Schritt ersetzen wir gleichzeitig alle ganzen Zahlen an der Tafel auf diese Weise. Nach 30 Schritten erhalten wir $n = 4^{30}$ ganze Zahlen b_1, b_2, \dots, b_n an der Tafel. Man zeige, dass

$$\frac{b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2}{n} \geq 2011.$$

Aufgabe I-2.

Sei $n \geq 3$ eine ganze Zahl. John und Mary spielen das folgende Spiel: Zuerst beschriftet John die Seiten eines regelmäßigen n -Ecks mit den Zahlen $1, 2, \dots, n$ in beliebiger Reihenfolge, wobei er jede Zahl genau ein Mal verwendet. Dann unterteilt Mary das n -Eck in Dreiecke, indem sie $n - 3$ Diagonalen zeichnet, die einander im Inneren des n -Ecks nicht schneiden. Alle diese Diagonalen werden mit der Zahl 1 beschriftet. In jedes der Dreiecke wird das Produkt der Zahlen auf seinen Seiten geschrieben. Sei S die Summe dieser $n - 2$ Produkte.

Man bestimme den Wert von S , wenn Mary möchte, dass die Zahl S so klein wie möglich ist, John hingegen, dass S so groß wie möglich ist, und beide die bestmöglichen Entscheidungen treffen.

Aufgabe I-3.

In der Ebene schneiden die Kreise \mathcal{K}_1 und \mathcal{K}_2 mit Mittelpunkten I_1 bzw. I_2 einander in den zwei Punkten A und B . Der Winkel $\angle I_1 A I_2$ sei stumpf. Die Tangente an \mathcal{K}_1 in A schneide \mathcal{K}_2 ein zweites Mal in C , und die Tangente an \mathcal{K}_2 in A schneide \mathcal{K}_1 ein zweites Mal in D . Sei \mathcal{K}_3 der Umkreis des Dreiecks BCD . Sei E der Mittelpunkt desjenigen Kreisbogens CD von \mathcal{K}_3 , der B enthält. Die Geraden AC und AD schneiden \mathcal{K}_3 zum zweiten Mal in K bzw. L . Man zeige, dass die Gerade AE senkrecht auf der Geraden KL steht.

Aufgabe I-4.

Seien k und m , mit $k > m$, positive ganze Zahlen, sodass die Zahl $km(k^2 - m^2)$ durch $k^3 - m^3$ teilbar ist. Man zeige, dass $(k - m)^3 > 3km$ gilt.

Arbeitszeit: 5 Stunden

Fragezeit: 45 min

Bei jeder Aufgabe können 8 Punkte erreicht werden.

Die Reihenfolge der Aufgaben hängt nicht von deren Schwierigkeit ab.