5th MIDDLE EUROPEAN MATHEMATICAL OLYMPIAD
VARAŽDIN 2011 CROATIA

*language: German*

# 5. Mitteleuropäische Mathematik-Olympiade

Einzelwettbewerb

3. September 2011

**Aufgabe I-1.**
Zu Beginn steht nur die Zahl 44 an der Tafel. Eine Zahl $a$ an der Tafel kann durch vier paarweise verschiedene ganze Zahlen $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$ ersetzt werden, sodass deren arithmetisches Mittel $\frac{1}{4}(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)$ gleich der Zahl $a$ ist. In einem Schritt ersetzen wir gleichzeitig alle ganzen Zahlen an der Tafel auf diese Weise. Nach 30 Schritten erhalten wir $n = 4^{30}$ ganze Zahlen $b_1, b_2, \ldots, b_n$ an der Tafel. Man zeige, dass

$$\frac{b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2}{n} \geq 2011\,.$$

**Aufgabe I-2.**
Sei $n \geq 3$ eine ganze Zahl. John und Mary spielen das folgende Spiel: Zuerst beschriftet John die Seiten eines regelmäßigen $n$-Ecks mit den Zahlen $1, 2, \ldots, n$ in beliebiger Reihenfolge, wobei er jede Zahl genau ein Mal verwendet. Dann unterteilt Mary das $n$-Eck in Dreiecke, indem sie $n-3$ Diagonalen zeichnet, die einander im Inneren des $n$-Ecks nicht schneiden. Alle diese Diagonalen werden mit der Zahl 1 beschriftet. In jedes der Dreiecke wird das Produkt der Zahlen auf seinen Seiten geschrieben. Sei $S$ die Summe dieser $n-2$ Produkte.

Man bestimme den Wert von $S$, wenn Mary möchte, dass die Zahl $S$ so klein wie möglich ist, John hingegen, dass $S$ so groß wie möglich ist, und beide die bestmöglichen Entscheidungen treffen.

**Aufgabe I-3.**
In der Ebene schneiden die Kreise $\mathcal{K}_1$ und $\mathcal{K}_2$ mit Mittelpunkten $I_1$ bzw. $I_2$ einander in den zwei Punkten $A$ und $B$. Der Winkel $\angle I_1AI_2$ sei stumpf. Die Tangente an $\mathcal{K}_1$ in $A$ schneide $\mathcal{K}_2$ ein zweites Mal in $C$, und die Tangente an $\mathcal{K}_2$ in $A$ schneide $\mathcal{K}_1$ ein zweites Mal in $D$. Sei $\mathcal{K}_3$ der Umkreis des Dreiecks $BCD$. Sei $E$ der Mittelpunkt desjenigen Kreisbogens $CD$ von $\mathcal{K}_3$, der $B$ enthält. Die Geraden $AC$ und $AD$ schneiden $\mathcal{K}_3$ zum zweiten Mal in $K$ bzw. $L$. Man zeige, dass die Gerade $AE$ senkrecht auf der Geraden $KL$ steht.

**Aufgabe I-4.**
Seien $k$ und $m$, mit $k > m$, positive ganze Zahlen, sodass die Zahl $km(k^2 - m^2)$ durch $k^3 - m^3$ teilbar ist. Man zeige, dass $(k-m)^3 > 3km$ gilt.

*Arbeitszeit: 5 Stunden*
*Fragezeit: 45 min*
*Bei jeder Aufgabe können 8 Punkte erreicht werden.*
*Die Reihenfolge der Aufgaben hängt nicht von deren Schwierigkeit ab.*