



5th MIDDLE EUROPEAN MATHEMATICAL OLYMPIAD
VARAŽDIN 2011 CROATIA

language: Hungarian

5th Middle European Mathematical Olympiad

EGYÉNI VERSENY

2011. SZEPTEMBER 3.

I-1. feladat

Kezdetben egy táblán egyetlen szám, a 44 áll. Egy táblán lévő a egész számot lecserélhetünk négy olyan páronként különböző a_1, a_2, a_3, a_4 egész számra, melyeknek az $\frac{1}{4}(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)$ számtani közepe éppen a . Egy lépés során egyidejűleg lecseréljük a táblán lévő összes számot a fent megadott módon. Mutassuk meg, hogy 30 lépés után a táblán szereplő b_1, b_2, \dots, b_n ($n = 4^{30}$) egész számokra fennáll, hogy

$$\frac{b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2}{n} \geq 2011.$$

I-2. feladat

Legyen $n \geq 3$ egész szám. Jancsi és Marcsi a következő játékot játsszák. Először Jancsi felírja az $1, 2, \dots, n$ számokat egy szabályos n -szög oldalaira az általa választott sorrendben, minden számot pontosan egyszer használva. Ezután Marcsi háromszögekre bontja az n -szöget $n - 3$ átló behúzásával úgy, hogy a behúzott átlók a sokszögen belül ne messék egymást. A behúzott átlókra az 1-es számot írják. Végül minden háromszögbe beírják az oldalain lévő számok szorzatát, legyen S ezen $n - 2$ szorzat összege.

Határozzuk meg S értékét, ha Marcsi arra törekszik, hogy S a lehető legkisebb, Jancsi pedig arra, hogy a lehető legnagyobb legyen, és mindketten a lehető legjobban játszanak.

I-3. feladat

Adottak a síkban az I_1 illetve I_2 középpontú \mathcal{K}_1 illetve \mathcal{K}_2 körök, melyek az A és B pontokban metszik egymást. Tegyük fel továbbá, hogy $I_1 A I_2$ tompaszög. A \mathcal{K}_1 kör A pontbeli érintője \mathcal{K}_2 -t C -ben metszi újra, a \mathcal{K}_2 kör A -beli érintője \mathcal{K}_1 -et D -ben metszi újra. Legyen \mathcal{K}_3 a BCD háromszög körülírt köre. Jelölje E a \mathcal{K}_3 kör B -t tartalmazó CD ívének a felezőpontját. Az AC illetve AD egyenesek a \mathcal{K}_3 kört rendre a K illetve L pontokban metszik újra. Mutassuk meg, hogy az AE egyenes merőleges a KL egyenesre.

I-4. feladat

Legyenek k és m ($k > m$) olyan pozitív egészek, melyekre $k^3 - m^3$ osztója $km(k^2 - m^2)$ -nek. Bizonyítsuk be, hogy $(k - m)^3 > 3km$.

A feladatok megoldására 5 óra áll rendelkezésre.

Kérdéseket az első 45 percben lehet feltenni.

Minden feladat 8 pontot ér.

A feladatok nem nehézségi sorrendben vannak.