



5th MIDDLE EUROPEAN MATHEMATICAL OLYMPIAD
VARAŽDIN 2011 CROATIA

language: Lithuanian

5-oji Vidurio Europos matematikos olimpiada

INDIVIDUALIOSIOS VARŽYBOS

2011-09-03

Užduotis I-1.

Pradžioje ant lentos užrašytas vienintelis skaičius 44. Ant lentos bet kuris sveikasis skaičius a gali būti pakeistas keturiais tarpusavyje skirtingais sveikaisiais skaičiais a_1, a_2, a_3, a_4 , kurių aritmetinis vidurkis $\frac{1}{4}(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)$ lygus a . Vienu ėjimu šitaip tuo pat metu pakeičiami visi ant lentos esantys sveikieji skaičiai. Po 30 ėjimų ant lentos buvo užrašyti $n = 4^{30}$ skaičių b_1, b_2, \dots, b_n . Įrodykite, kad

$$\frac{b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2}{n} \geq 2011.$$

Užduotis I-2.

Duotas natūralusis skaičius $n \geq 3$. Jonas ir Marytė žaidžia tokį žaidimą. Pradžioje Jonas bet kuria jo pasirinkta tvarka sužymi taisyklingojo n -kampio kraštines skirtingais natūraliaisiais skaičiais $1, 2, \dots, n$. Tada Marytė padalija n -kampį į trikampius, išvesdama $n - 3$ jo įstrižaines, nesikertančias n -kampio viduje. Visos įstrižainės pažymimos skaičiumi 1. Į kiekvieną iš trikampių įrašoma skaičių, kuriais pažymėtos jo kraštinės, sandauga. Visų $n - 2$ sandaugų sumą pažymėkime S .

Raskite S , jei Marytė siekia, kad šis skaičius būtų kuo mažesnis, Jonas siekia, kad jis būtų kuo didesnis, ir abu neklysdami renkasi tai, kas jiems geriausia.

Užduotis I-3.

Plokštumos apskritimai \mathcal{K}_1 ir \mathcal{K}_2 , kurių centrai yra atitinkamai I_1 ir I_2 , kertasi dviejuose taškuose A ir B . Kampas $I_1 A I_2$ yra bukasis. Apskritimo \mathcal{K}_1 liestinė taške A kerta \mathcal{K}_2 taške $C \neq A$, o \mathcal{K}_2 liestinė taške A kerta \mathcal{K}_1 taške $D \neq A$. Apie trikampį BCD apibrėžtas apskritimas \mathcal{K}_3 . \mathcal{K}_3 lanko CD , kuriam priklauso taškas B , vidurį pažymėkime E . Tiesės AC ir AD kerta \mathcal{K}_3 atitinkamai taškuose $K \neq C$ ir $L \neq D$. Įrodykite, kad tiesės AE ir KL yra statmenos.

Užduotis I-4.

Tegu k ir m ($k > m$) yra tokie natūralieji skaičiai, kad $km(k^2 - m^2)$ dalijasi iš $k^3 - m^3$. Įrodykite, kad $(k - m)^3 > 3km$.

Laikas: 5 valandos

Laikas klausimams: 45 min

Kiekviena užduotis verta 8 taškus.

Užduočių tvarka nepriklauso nuo jų sudėtingumo.