5th MIDDLE EUROPEAN MATHEMATICAL OLYMPIAD
VARAŽDIN 2011 CROATIA

language: Polish

V Środkowoeuropejskie Zawody Matematyczne

Zawody Indywidualne

3 Września 2011

Zadanie I-1.
Na początku na tablicy napisana jest liczba 44. Liczba całkowita a na tablicy może być zastąpiona takimi czterema różnymi liczbami całkowitymi a_1, a_2, a_3, a_4, że średnia arytmetyczna $\frac{1}{4}(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)$ tych czterech nowych liczb jest równa a. W jednym kroku jednocześnie zamieniamy wszystkie liczby na tablicy w opisany wyżej sposób. Po 30 krokach otrzymujemy na tablicy $n = 4^{30}$ liczb $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Udowodnić, że

$$\frac{b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2}{n} \geqslant 2011\,.$$

Zadanie I-2.
Niech $n \geqslant 3$ będzie liczbą całkowitą. Jaś i Marysia grają w następującą grę: Najpierw Jaś numeruje boki n-kąta foremnego liczbami $1, 2, \ldots, n$ w dowolnie wybranej kolejności, używając każdej z liczb dokładnie raz. Następnie Marysia dzieli ten n-kąt na trójkąty wybierając $n-3$ przekątnych nie przecinających się wewnątrz n-kąta. Wszystkie te przekątne zostają ponumerowane liczbą 1. W każdym z trójkątów zostaje napisany iloczyn liczb znajdujących się na jego bokach. Niech S będzie sumą tych $n-2$ iloczynów.

Wyznaczyć wartość S, jeśli Marysia chce uzyskać jak najmniejszą liczbę S, a Jaś jak największą i oboje dokonają najlepszych możliwych wyborów.

Zadanie I-3.
Okręgi $\mathcal{K}_1$ i $\mathcal{K}_2$ na płaszczyźnie, o środkach odpowiednio I_1 i I_2, przecinają się w dwóch punktach A i B. Zakładamy, że $\sphericalangle I_1AI_2$ jest rozwarty. Styczna do $\mathcal{K}_1$ w punkcie A przecina $\mathcal{K}_2$ ponownie w punkcie C, a styczna do $\mathcal{K}_2$ w punkcie A przecina $\mathcal{K}_1$ ponownie w punkcie D. Niech $\mathcal{K}_3$ będzie okręgiem opisanym na trójkącie BCD. Niech E będzie środkiem tego łuku CD okręgu $\mathcal{K}_3$, który zawiera punkt B. Proste AC i AD przecinają ponownie okrąg $\mathcal{K}_3$ odpowiednio w punktach K i L. Wykazać, że proste AE i KL są prostopadłe.

Zadanie I-4.
Niech k i m, przy czym $k > m$, będą takimi dodatnimi liczbami całkowitymi, że liczba $km(k^2 - m^2)$ jest podzielna przez $k^3 - m^3$. Udowodnić, że $(k - m)^3 > 3km$.

Czas: 5 godzin
Czas na pytania: 45 minut
Za każde zadanie można otrzymać 8 punktów.
Kolejność zadań nie zależy od ich trudności.