



## 5. ročník Stredoeurópskej matematickej olympiády

SÚŤAŽ JEDNOTLIVCOV

3. SEPTEMBER, 2011

### Úloha I-1.

Na začiatku je na tabuli napísané číslo 44. Celé číslo  $a$  na tabuli môžeme nahradiť štyrmi navzájom rôznymi celými číslami  $a_1, a_2, a_3, a_4$  takými, že ich aritmetický priemer  $\frac{1}{4}(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)$  je rovný číslu  $a$ . V každom kroku naraz nahradíme všetky čísla na tabuli vyššie opísaným spôsobom. Po 30 krokoch bude na tabuli  $n = 4^{30}$  celých čísel  $b_1, b_2, \dots, b_n$ . Dokážte, že

$$\frac{b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2}{n} \geq 2011.$$

### Úloha I-2.

Dané je celé číslo  $n \geq 3$ . Janko a Marienka hrajú nasledujúcu hru: Najskôr Janko označí strany pravidelného  $n$ -uholníka číslami  $1, 2, \dots, n$  v ľubovoľnom poradí, pričom každé číslo použije práve raz. Potom Marienka rozdelí uvedený  $n$ -uholník na trojuholníky pomocou  $n - 3$  uhlopriečok, ktoré sa vnútri  $n$ -uholníka nepretínajú. Všetky tieto uhlopriečky označíme číslom 1. Dovnútra každého trojuholníka napíšeme súčin čísel na jeho stranách. Nech  $S$  je súčet týchto  $n - 2$  súčinov.

Určte, aká bude hodnota  $S$ , ak Marienka chce, aby bolo  $S$  čo najmenšie, Janko chce, aby bolo  $S$  čo najväčšie a obaja hrajú najlepšie ako sa dá.

### Úloha I-3.

V rovine sa kružnice  $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$  so stredmi  $I_1, I_2$  pretínajú v dvoch bodoch  $A$  a  $B$ . Predpokladajme, že uhol  $I_1 A I_2$  je tupý. Dotyčnica ku  $\mathcal{K}_1$  vedená bodom  $A$  pretína kružnicu  $\mathcal{K}_2$  znova v bode  $C$  a dotyčnica ku  $\mathcal{K}_2$  vedená bodom  $A$  pretína kružnicu  $\mathcal{K}_1$  znova v bode  $D$ . Nech  $\mathcal{K}_3$  je kružnica opísaná trojuholníku  $BCD$ . Označme  $E$  stred oblúka  $CD$  kružnice  $\mathcal{K}_3$  obsahujúceho bod  $B$ . Priamky  $AC$  a  $AD$  pretínajú kružnicu  $\mathcal{K}_3$  znova postupne v bodoch  $K$  a  $L$ . Dokážte, že priamky  $AE$  a  $KL$  sú na seba kolmé.

### Úloha I-4.

Nech  $k$  a  $m$  sú kladné celé čísla, pričom  $k > m$  a číslo  $km(k^2 - m^2)$  je deliteľné číslom  $k^3 - m^3$ . Dokážte, že  $(k - m)^3 > 3km$ .

Čas na riešenie: 5 hodín

Čas na otázky: 45 minút

Za každú úlohu je možné získať najviac 8 bodov.

Poradie úloh nezávisí od ich obtiažnosti.