5th MIDDLE EUROPEAN MATHEMATICAL OLYMPIAD
VARAŽDIN 2011 CROATIA

language: Croatian

5. Srednjoeuropska matematička olimpijada

EKIPNO NATJECANJE

4. RUJNA 2011.

Zadatak T-1.
Nađite sve funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da jednakost

$$y^2 f(x) + x^2 f(y) + xy = xyf(x+y) + x^2 + y^2$$

vrijedi za sve $x, y \in \mathbb{R}$, gdje je $\mathbb{R}$ skup realnih brojeva.

Zadatak T-2.
Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi takvi da vrijedi

$$\frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c} = 2.$$

Dokažite da je

$$\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}{2} \geqslant \frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{c}}.$$

Zadatak T-3.
Za prirodan broj $n \geq 3$ neka je $\mathcal{M} = \{(x,y) \mid x, y \in \mathbb{Z},\ 1 \leq x \leq n, 1 \leq y \leq n\}$ skup točaka ravnine. ($\mathbb{Z}$ je skup cijelih brojeva.)

Koji je najveći mogući broj elemenata podskupa $S \subseteq \mathcal{M}$ koji ne sadrži nikoje tri različite točke koje su vrhovi pravokutnog trokuta?

Zadatak T-4.
Neka je $n \geq 3$ prirodan broj. Na natjecanju nalik MEMO-u sudjeluje $3n$ učenika koji govore ukupno n jezika, a svaki od njih govori točno tri različita jezika.

Dokažite da se može izabrati barem $\left\lceil \frac{2n}{9} \right\rceil$ jezika koji se govore, tako da nijedan učenik ne govori više od dva izabrana jezika.

($\lceil x \rceil$ je najmanji cijeli broj veći ili jednak od x.)

Zadatak T-5.
Neka je $ABCDE$ konveksni peterokut kojemu su sve stranice jednake duljine. Dijagonale $\overline{AD}$ i $\overline{EC}$ sijeku se u točki S pri čemu je $\sphericalangle ASE = 60°$. Dokažite da u $ABCDE$ postoje dvije paralelne stranice.

Zadatak T-6.
Neka je ABC šiljastokutan trokut. Označimo s B_0 i C_0 nožišta visina iz vrhova B i C, redom. Neka je X točka unutar trokuta ABC takva da je pravac BX tangenta na opisanu kružnicu trokuta AXC_0 i pravac CX tangenta na opisanu kružnicu trokuta AXB_0. Pokažite da je pravac AX okomit na BC.

Zadatak T-7.
Neka su A i B disjunktni neprazni skupovi takvi da je $A \cup B = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$. Pokažite da postoje elementi $a \in A$ i $b \in B$ takvi da je $a^3 + ab^2 + b^3$ djeljivo s 11.

Zadatak T-8.
Kažemo da je prirodan broj n *nevjerojatan* ako postoje prirodni brojevi a, b, c takvi da vrijedi jednakost

$$n = (b, c)(a, bc) + (c, a)(b, ca) + (a, b)(c, ab).$$

Dokažite da postoji 2011 uzastopnih prirodnih brojeva koji su nevjerojatni.
(Sa (m, n) označavamo najveći zajednički djeljitelj brojeva m i n.)

Vrijeme: 5 sati
Vrijeme za postavljanje pitanja: 45 min
Svaki zadatak vrijedi 8 bodova.
Redoslijed zadataka ne odražava njihovu težinu.