5th MIDDLE EUROPEAN MATHEMATICAL OLYMPIAD
VARAŽDIN 2011 CROATIA

language: *Czech*

5. Středoevropská matematická olympiáda

Soutěž družstev

4. září 2011

Úloha T-1.
Najděte všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$ platí

$$y^2 f(x) + x^2 f(y) + xy = xyf(x+y) + x^2 + y^2,$$

kde $\mathbb{R}$ značí množinu všech reálných čísel.

Úloha T-2.
Nechť kladná reálná čísla a, b, c vyhovují vztahu

$$\frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c} = 2.$$

Dokažte, že pak

$$\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}{2} \geqslant \frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{c}}.$$

Úloha T-3.
Pro celé číslo $n \geq 3$ označme $\mathcal{M}$ množinu $\{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{Z},\ 1 \leq x \leq n, 1 \leq y \leq n\}$ bodů roviny. ($\mathbb{Z}$ značí množinu všech celých čísel.)

Určete největší možný počet prvků podmnožiny $S \subseteq \mathcal{M}$, jejíž žádné tři body nejsou vrcholy pravoúhlého trojúhelníku.

Úloha T-4.
Nechť $n \geq 3$ je celé číslo. Na soutěž přijelo $3n$ účastníků, kteří hovoří dohromady n různými jazyky, přitom každý účastník mluví právě třemi z nich.

Dokažte, že lze vybrat aspoň $\left\lceil \frac{2n}{9} \right\rceil$ z těchto jazyků tak, že žádný účastník nehovoří více než dvěma z nich.

(Symbol $\lceil x \rceil$ značí nejmenší celé číslo, které není menší než x.)

Úloha T-5.
Konvexní pětiúhelník $ABCDE$ má shodné strany. Úhlopříčky AD a EC se protínají v bodě S, přičemž $|\sphericalangle ASE| = 60^\circ$. Dokažte, že pětiúhelník $ABCDE$ má dvě rovnoběžné strany.

Úloha T-6.
Nechť ABC je ostroúhlý trojúhelník. Označme B_0 a C_0 paty výšek po řadě z vrcholů B a C. Nechť pro vnitřní bod X trojúhelníku ABC je přímka BX tečnou kružnice opsané trojúhelníku AXC_0 a přímka CX je tečnou kružnice opsané trojúhelníku AXB_0. Ukažte, že přímky AX a BC jsou vzájemně kolmé.

Úloha T-7.
Nechť pro neprázdné navzájem disjunktní množiny A a B platí $A \cup B = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$. Ukažte, že existují čísla $a \in A$ a $b \in B$ tak, že číslo $a^3 + ab^2 + b^3$ je dělitelné 11.

Úloha T-8.
Kladné celé číslo n nazveme *úžasné*, právě když existují kladná celá čísla a, b, c pro která

$$n = (b, c)(a, bc) + (c, a)(b, ca) + (a, b)(c, ab).$$

Dokažte, že existuje 2011 po sobě jdoucích celých čísel, která jsou úžasná.
(Přitom (m, n) značí největší společný dělitel přirozených čísel m a n.)

Čas na vypracování: 5 hodin
Čas na otázky: 45 min
Každá úloha je hodnocena nejvýše 8 body.
Úlohy nejsou řazeny dle obtížnosti.