5th MIDDLE EUROPEAN MATHEMATICAL OLYMPIAD
VARAŽDIN 2011 CROATIA

language: Lithuanian

5-oji Vidurio Europos matematikos olimpiada

KOMANDINĖS VARŽYBOS

2011-09-04

Užduotis T-1.
Raskite visas tokias funkcijas $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kad lygybė

$$y^2 f(x) + x^2 f(y) + xy = xy f(x+y) + x^2 + y^2$$

galioja visiems $x, y \in \mathbb{R}$, kur $\mathbb{R}$ yra realiųjų skaičių aibė.

Užduotis T-2.
Teigiami realieji skaičiai a, b, c tenkina lygybę

$$\frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c} = 2.$$

Įrodykite, kad

$$\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}{2} \geqslant \frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{c}}.$$

Užduotis T-3.
Duotas natūralusis skaičius $n \geq 3$. Plokštumos taškų aibę $\{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{Z},\ 1 \leq x \leq n, 1 \leq y \leq n\}$ pažymėkime $\mathcal{M}$. ($\mathbb{Z}$ yra sveikųjų skaičių aibė.)

Kiek daugiausiai taškų gali būti poaibyje $S \subseteq \mathcal{M}$, kurio jokie trys skirtingi elementai nėra stačiojo trikampio viršūnės?

Užduotis T-4.
Duotas natūralusis skaičius $n \geq 3$. Tarptautinėse matematikos varžybose buvo $3n$ dalyvių, buvo kalbama n kalbų, o kiekvienas dalyvis mokėjo lygiai tris skirtingas kalbas.

Įrodykite, kad tarp tų kalbų buvo mažiausiai $\left\lceil \frac{2n}{9} \right\rceil$ tokių, iš kurių bet kuris dalyvis mokėjo daugiausiai dvi.

($\lceil x \rceil$ yra mažiausias sveikasis skaičius, ne mažesnis už x.)

Užduotis T-5.
Iškilojo penkiakampio $ABCDE$ visos kraštinės lygios. Įstrižainės AD ir EC kertasi taške S; be to, $\angle ASE = 60^\circ$. Įrodykite, kad dvi penkiakampio $ABCDE$ kraštinės yra lygiagrečios.

Užduotis T-6.
Trikampis ABC yra smailasis. B_0 ir C_0 yra jo aukštinių, nuleistų atitinkamai iš viršūnių B ir C, pagrindai. X yra toks trikampio ABC vidaus taškas, kad tiesė BX liečia apie trikampį AXC_0 apibrėžtą apskritimą, o tiesė CX – apie trikampį AXB_0 apibrėžtą apskritimą. Įrodykite, kad tiesės AX ir BC yra statmenos.

Užduotis T-7.
Netuščios aibės A ir B nesikerta, ir $A \cup B = \{1, 2, 3, ..., 10\}$. Įrodykite, kad egzistuoja tokie skaičiai $a \in A$ bei $b \in B$, kad skaičius $a^3 + ab^2 + b^3$ yra dalus iš 11.

Užduotis T-8.
Natūralusis skaičius n vadinamas *nuostabiu*, jei egzistuoja tokie natūralieji skaičiai a, b, c, kad

$$n = (b, c)(a, bc) + (c, a)(b, ca) + (a, b)(c, ab).$$

Įrodykite, kad egzistuoja 2011 iš eilės einančių nuostabių natūraliųjų skaičių.
((m, n) žymi natūraliųjų skaičių m ir n didžiausią bendrą daliklį.)

Laikas: 5 valandos
Laikas klausimams: 45 min
Kiekviena užduotis verta 8 taškų.
Užduočių tvarka nepriklauso nuo jų sudėtingumo.