5th MIDDLE EUROPEAN MATHEMATICAL OLYMPIAD
VARAŽDIN 2011 CROATIA

language: Polish

V Środkowoeuropejskie Zawody Matematyczne

Zawody Drużynowe

4 Września 2011

Zadanie T-1.
Znaleźć wszystkie takie funkcje $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, że równość

$$y^2 f(x) + x^2 f(y) + xy = xyf(x+y) + x^2 + y^2$$

zachodzi dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$, gdzie $\mathbb{R}$ jest zbiorem liczb rzeczywistych.

Zadanie T-2.
Niech a, b i c będą takimi dodatnimi liczbami rzeczywistymi, że

$$\frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c} = 2.$$

Dowieść, że

$$\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}{2} \geqslant \frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{c}}.$$

Zadanie T-3.
Dla liczby całkowitej $n \geqslant 3$ niech $\mathcal{M}$ będzie zbiorem $\{(x,y) \mid x, y \in \mathbb{Z},\ 1 \leqslant x \leqslant n, 1 \leqslant y \leqslant n\}$ punktów na płaszczyźnie. ($\mathbb{Z}$ jest zbiorem liczb całkowitych.)

Jaka jest największa możliwa liczba elementów podzbioru $S \subseteq \mathcal{M}$ nie zawierającego trzech różnych punktów będących wierzchołkami trójkąta prostokątnego?

Zadanie T-4.
Niech $n \geqslant 3$ będzie liczbą całkowitą. W zawodach typu MEMO bierze udział $3n$ uczestników, w użyciu jest n języków, a każdy z uczestników mówi dokładnie trzema językami.

Dowieść, że można wybrać przynajmniej $\left\lceil \frac{2n}{9} \right\rceil$ używanych języków w taki sposób, że żaden uczestnik nie mówi więcej niż dwoma spośród wybranych języków.

($\lceil x \rceil$ jest najmniejszą liczbą całkowitą większą lub równą x.)

Zadanie T-5.
Niech $ABCDE$ będzie wypukłym pięciokątem, którego wszystkie boki mają jednakową długość. Przekątne AD i EC przecinają się w takim punkcie S, że $\sphericalangle ASE = 60^\circ$. Udowodnić, że $ABCDE$ posiada parę równoległych boków.

Zadanie T-6.
Dany jest trójkąt ostrokątny ABC. Punkty B_0 i C_0 są spodkami wysokości opuszczonych odpowiednio z wierzchołków B i C. Niech X będzie takim punktem wewnątrz trójkąta ABC, że prosta BX jest styczna do okręgu opisanego na trójkącie AXC_0, zaś prosta CX jest styczna do okręgu opisanego na trójkącie AXB_0. Wykazać, że proste AX i BC są prostopadłe.

Zadanie T-7.
Niech A i B będą takimi rozłącznymi niepustymi zbiorami, że $A \cup B = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$. Udowodnić, że istnieją elementy $a \in A$ i $b \in B$, dla których liczba $a^3 + ab^2 + b^3$ jest podzielna przez 11.

Zadanie T-8.
Dodatnią liczbę całkowitą n nazwiemy *cudowną,* jeżeli istnieją takie dodatnie liczby całkowite a, b, c, że zachodzi równość

$$n = (b, c)(a, bc) + (c, a)(b, ca) + (a, b)(c, ab).$$

Dowieść, że istnieje 2011 kolejnych dodatnich liczb całkowitych, z których każda jest cudowna. (Przez (m, n) oznaczamy największy wspólny dzielnik dodatnich liczb całkowitych m i n.)

Czas: 5 godzin
Czas na pytania: 45 minut
Za każde zadanie można otrzymać 8 punktów.
Kolejność zadań nie zależy od ich trudności.