5th MIDDLE EUROPEAN MATHEMATICAL OLYMPIAD
VARAŽDIN 2011 CROATIA

language: Slovenian

5. Srednjeevropska matematična olimpijada

Skupinsko tekmovanje

4. september 2011

Naloga T-1.
Poiščite vse funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, za katere velja

$$y^2 f(x) + x^2 f(y) + xy = xy f(x+y) + x^2 + y^2$$

za vse $x, y \in \mathbb{R}$.

Naloga T-2.
Naj bodo a, b in c pozitivna realna števila, za katera velja

$$\frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c} = 2.$$

Dokažite neenakost

$$\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}{2} \geqslant \frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{c}}.$$

Naloga T-3.
Za naravno število $n \geq 3$ naj bo $\mathcal{M}$ naslednja množica točk v ravnini:

$$\{(x,y); x, y \in \mathbb{Z},\ 1 \leq x \leq n, 1 \leq y \leq n\}.$$

Največ koliko točk lahko vsebuje podmnožica $S \subseteq \mathcal{M}$, ki ne vsebuje nobenih takih treh različnih točk, ki bi bila oglišča pravokotnega trikotnika?

Naloga T-4.
Naj bo $n \geq 3$ naravno število. Na tekmovanju, podobnem Srednjeevropski matematični olimpijadi, sodeluje $3n$ tekmovalcev. Skupaj govorijo n različnih jezikov, vsak tekmovalec pa govori natanko tri različne jezike.

Dokažite, da lahko izmed teh n jezikov izberemo vsaj $\left\lceil \frac{2n}{9} \right\rceil$ jezikov, tako da noben tekmovalec ne govori več kot dveh izmed izbranih jezikov.

($\lceil x \rceil$ je najmanjše celo število, ki je večje ali enako številu x.)

Naloga T-5.
Naj bo $ABCDE$ konveksen petkotnik, ki ima vse stranice enako dolge. Diagonali AD in EC se sekata v S in velja $\angle ASE = 60°$. Dokažite, da ima petkotnik $ABCDE$ par vzporednih stranic.

Naloga T-6.
Naj bo ABC ostrokotni trikotnik. Nožišči višin trikotnika iz B in C označimo zaporedoma z B_0 in C_0. Naj bo X taka točka v notranjosti trikotnika ABC, da je premica BX tangentna na trikotniku AXC_0 očrtano krožnico, premica CX pa tangentna na trikotniku AXB_0 očrtano krožnico. Dokažite, da je premica AX pravokotna na premico BC.

Naloga T-7.
Naj bosta A in B disjunktni neprazni množici z unijo $A \cup B = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$. Dokažite, da obstajata $a \in A$ in $b \in B$, tako da je število $a^3 + ab^2 + b^3$ deljivo z 11.

Naloga T-8.
Pravimo, da je naravno število n *izjemno*, če obstajajo naravna števila a, b in c, da velja

$$n = (b, c)(a, bc) + (c, a)(b, ca) + (a, b)(c, ab).$$

Dokažite, da obstaja 2011 zaporednih *izjemnih* naravnih števil.
(Z (m, n) smo označili največji skupni delitelj naravnih števil m in n.)

Čas: 5 ur
Čas za vprašanja: 45 min
Vsaka naloga je vredna 8 točk.
Vrstni red nalog ni odvisen od njihove težavnosti.