5th MIDDLE EUROPEAN MATHEMATICAL OLYMPIAD

VARAŽDIN 2011 CROATIA

language: Czech

5. Středoevropská matematická olympiáda

Soutěž jednotlivců

3. září 2011

Úloha I-1.
Na tabuli je napsáno číslo 44. Celé číslo a napsané na tabuli můžeme nahradit čtyřmi různými celými čísly a_1, a_2, a_3, a_4, jejichž aritmetický průměr $\frac{1}{4}(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)$ je roven číslu a. V jednom kroku současně nahradíme všechna čísla na tabuli výše popsaným způsobem. Po 30 krocích dostaneme na tabuli $n = 4^{30}$ celých čísel $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Dokažte, že

$$\frac{b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2}{n} \geq 2011\,.$$

Úloha I-2.
Nechť $n \geq 3$ je přirozené číslo. Jeníček a Mařenka hrají následující hru: Nejdříve Jeníček očísluje strany pravidelného n-úhelníku čísly od 1 do n (v libovolném pořadí; každé číslo použije právě jednou). Potom Mařenka zvolí některých $n-3$ neprotínajících se úhlopříček rozdělujících daný n-úhelník na trojúhelníky. Všechny tyto úhlopříčky se pak očíslují číslem 1, a dovnitř každého z trojúhelníků se napíše součin čísel na jeho stranách. Součet těchto $n-2$ součinů označme S. Jaká bude hodnota součtu S, jestliže snahou Jeníčka je, aby byl součet co největší a Mařenka se snaží, aby byl součet co nejmenší, přičemž oba dělají nejlepší možné volby?

Úloha I-3.
V rovině se kružnice $\mathcal{K}_1$ a $\mathcal{K}_2$, o středech po řadě I_1 a I_2, protínají ve dvou bodech A a B. Nechť je úhel I_1AI_2 tupý. Tečna ke $\mathcal{K}_1$ v bodě A protíná $\mathcal{K}_2$ ještě v bodě C a tečna ke $\mathcal{K}_2$ v bodě A protíná $\mathcal{K}_1$ ještě v bodě D. Označme $\mathcal{K}_3$ kružnici opsanou trojúhelníku BCD. Nechť E je střed toho oblouku CD kružnice $\mathcal{K}_3$, který obsahuje bod B. Přímky AC a AD protínají $\mathcal{K}_3$ po řadě ještě v bodech K a L. Dokažte, že přímky AE a KL jsou vzájemně kolmé.

Úloha I-4.
Nechť k a m $(k > m)$ jsou kladná celá čísla taková, že číslo $km(k^2 - m^2)$ je dělitelné číslem $k^3 - m^3$. Dokažte, že $(k-m)^3 > 3km$.

Čas na vypracování: 5 hodin
Čas na otázky: 45 min
Každá úloha je hodnocena nejvýše 8 body.
Úlohy nejsou řazeny dle obtížnosti.