5th MIDDLE EUROPEAN MATHEMATICAL OLYMPIAD
VARAŽDIN 2011 CROATIA

language: *Hungarian*

# $5^{\text{th}}$ Middle European Mathematical Olympiad

Egyéni verseny

2011. szeptember 3.

**I-1. feladat**
Kezdetben egy táblán egyetlen szám, a 44 áll. Egy táblán lévő $a$ egész számot lecserélhetünk négy olyan páronként különböző $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$ egész számra, melyeknek az $\frac{1}{4}(a_1+a_2+a_3+a_4)$ számtani közepe éppen $a$. Egy lépés során egyidejűleg lecseréljük a táblán lévő összes számot a fent megadott módon. Mutassuk meg, hogy 30 lépés után a táblán szereplő $b_1, b_2, \ldots, b_n$ $(n = 4^{30})$ egész számokra fennáll, hogy

$$\frac{b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2}{n} \geq 2011\,.$$

**I-2. feladat**
Legyen $n \geq 3$ egész szám. Jancsi és Marcsi a következő játékot játsszák. Először Jancsi felírja az $1, 2, \ldots, n$ számokat egy szabályos $n$-szög oldalaira az általa választott sorrendben, minden számot pontosan egyszer használva. Ezután Marcsi háromszögekre bontja az $n$-szöget $n-3$ átló behúzásával úgy, hogy a behúzott átlók a sokszögön belül ne messék egymást. A behúzott átlókra az 1-es számot írják. Végül minden háromszögbe beírják az oldalain lévő számok szorzatát, legyen $S$ ezen $n-2$ szorzat összege.

Határozzuk meg $S$ értékét, ha Marcsi arra törekszik, hogy $S$ a lehető legkisebb, Jancsi pedig arra, hogy a lehető legnagyobb legyen, és mindketten a lehető legjobban játszanak.

**I-3. feladat**
Adottak a síkban az $I_1$ illetve $I_2$ középpontú $\mathcal{K}_1$ illetve $\mathcal{K}_2$ körök, melyek az $A$ és $B$ pontokban metszik egymást. Tegyük fel továbbá, hogy $I_1AI_2\sphericalangle$ tompaszög. A $\mathcal{K}_1$ kör $A$ pontbeli érintője $\mathcal{K}_2$-t $C$-ben metszi újra, a $\mathcal{K}_2$ kör $A$-beli érintője $\mathcal{K}_1$-et $D$-ben metszi újra. Legyen $\mathcal{K}_3$ a $BCD$ háromszög körülírt köre. Jelölje $E$ a $\mathcal{K}_3$ kör $B$-t tartalmazó $CD$ ívének a felezőpontját. Az $AC$ illetve $AD$ egyenesek a $\mathcal{K}_3$ kört rendre a $K$ illetve $L$ pontokban metszik újra. Mutassuk meg, hogy az $AE$ egyenes merőleges a $KL$ egyenesre.

**I-4. feladat**
Legyenek $k$ és $m$ $(k > m)$ olyan pozitív egészek, melyekre $k^3 - m^3$ osztója $km(k^2 - m^2)$-nek. Bizonyítsuk be, hogy $(k-m)^3 > 3km$.

*A feladatok megoldására 5 óra áll rendelkezésre.*
*Kérdéseket az első 45 percben lehet feltenni.*
*Minden feladat 8 pontot ér.*
*A feladatok nem nehézségi sorrendben vannak.*