5th MIDDLE EUROPEAN MATHEMATICAL OLYMPIAD
VARAŽDIN 2011 CROATIA

language: Lithuanian

5-oji Vidurio Europos matematikos olimpiada

Individualiosios varžybos

2011-09-03

Užduotis I-1.
Pradžioje ant lentos užrašytas vienintelis skaičius 44. Ant lentos bet kuris sveikasis skaičius a gali būti pakeistas keturiais tarpusavyje skirtingais sveikaisiais skaičiais a_1, a_2, a_3, a_4, kurių aritmentinis vidurkis $\frac{1}{4}(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)$ lygus a. Vienu ėjimu šitaip tuo pat metu pakeičiami visi ant lentos esantys sveikieji skaičiai. Po 30 ėjimų ant lentos buvo užrašyti $n = 4^{30}$ skaičių $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Įrodykite, kad

$$\frac{b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2}{n} \geq 2011\,.$$

Užduotis I-2.
Duotas natūralusis skaičius $n \geq 3$. Jonas ir Marytė žaidžia tokį žaidimą. Pradžioje Jonas bet kuria jo pasirinkta tvarka sužymi taisyklingojo n-kampio kraštines skirtingais natūraliaisiais skaičiais $1, 2, \ldots, n$. Tada Marytė padalija n-kampį į trikampius, išvesdama $n-3$ jo įstrižaines, nesikertančias n-kampio viduje. Visos įstrižainės pažymimos skaičiumi 1. Į kiekvieną iš trikampių įrašoma skaičių, kuriais pažymėtos jo kraštinės, sandauga. Visų $n-2$ sandaugų sumą pažymėkime S.

Raskite S, jei Marytė siekia, kad šis skaičius būtų kuo mažesnis, Jonas siekia, kad jis būtų kuo didesnis, ir abu neklysdami renkasi tai, kas jiems geriausia.

Užduotis I-3.
Plokštumos apskritimai $\mathcal{K}_1$ ir $\mathcal{K}_2$, kurių centrai yra atitinkamai I_1 ir I_2, kertasi dviejuose taškuose A ir B. Kampas I_1AI_2 yra bukasis. Apskritimo $\mathcal{K}_1$ liestinė taške A kerta $\mathcal{K}_2$ taške $C \neq A$, o $\mathcal{K}_2$ liestinė taške A kerta $\mathcal{K}_1$ taške $D \neq A$. Apie trikampį BCD apibrėžtas apskritimas $\mathcal{K}_3$. $\mathcal{K}_3$ lanko CD, kuriam priklauso taškas B, vidurį pažymėkime E. Tiesės AC ir AD kerta $\mathcal{K}_3$ atitinkamai taškuose $K \neq C$ ir $L \neq D$. Įrodykite, kad tiesės AE ir KL yra statmenos.

Užduotis I-4.
Tegu k ir m ($k > m$) yra tokie natūralieji skaičiai, kad $km(k^2-m^2)$ dalijasi iš k^3-m^3. Įrodykite, kad $(k-m)^3 > 3km$.

Laikas: 5 valandos
Laikas klausimams: 45 min
Kiekviena užduotis verta 8 taškų.
Užduočių tvarka nepriklauso nuo jų sudėtingumo.