



5th MIDDLE EUROPEAN MATHEMATICAL OLYMPIAD
VARAŽDIN 2011 CROATIA

language: Polish

V Środkowoeuropejskie Zawody Matematyczne

ZAWODY INDYWIDUALNE

3 WRZEŚNIA 2011

Zadanie I-1.

Na początku na tablicy napisana jest liczba 44. Liczba całkowita a na tablicy może być zastąpiona takimi czterema różnymi liczbami całkowitymi a_1, a_2, a_3, a_4 , że średnia arytmetyczna $\frac{1}{4}(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)$ tych czterech nowych liczb jest równa a . W jednym kroku jednocześnie zamieniamy wszystkie liczby na tablicy w opisany wyżej sposób. Po 30 krokach otrzymujemy na tablicy $n = 4^{30}$ liczb b_1, b_2, \dots, b_n . Udowodnić, że

$$\frac{b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2}{n} \geq 2011.$$

Zadanie I-2.

Niech $n \geq 3$ będzie liczbą całkowitą. Jaś i Marysia grają w następującą grę: Najpierw Jaś numeruje boki n -kąta foremnego liczbami $1, 2, \dots, n$ w dowolnie wybranej kolejności, używając każdej z liczb dokładnie raz. Następnie Marysia dzieli ten n -kątną na trójkąty wybierając $n - 3$ przekątnych nie przecinających się wewnątrz n -kąta. Wszystkie te przekątne zostają ponumerowane liczbą 1. W każdym z trójkątów zostaje napisany iloczyn liczb znajdujących się na jego bokach. Niech S będzie sumą tych $n - 2$ iloczynów.

Wyznaczyć wartość S , jeśli Marysia chce uzyskać jak najmniejszą liczbę S , a Jaś jak największą i oboje dokonają najlepszych możliwych wyborów.

Zadanie I-3.

Okręgi \mathcal{K}_1 i \mathcal{K}_2 na płaszczyźnie, o środkach odpowiednio I_1 i I_2 , przecinają się w dwóch punktach A i B . Zakładamy, że $\angle I_1 A I_2$ jest rozwarty. Styczna do \mathcal{K}_1 w punkcie A przecina \mathcal{K}_2 ponownie w punkcie C , a styczna do \mathcal{K}_2 w punkcie A przecina \mathcal{K}_1 ponownie w punkcie D . Niech \mathcal{K}_3 będzie okręgiem opisanym na trójkącie BCD . Niech E będzie środkiem tego łuku CD okręgu \mathcal{K}_3 , który zawiera punkt B . Proste AC i AD przecinają ponownie okrąg \mathcal{K}_3 odpowiednio w punktach K i L . Wykazać, że proste AE i KL są prostopadłe.

Zadanie I-4.

Niech k i m , przy czym $k > m$, będą takimi dodatnimi liczbami całkowitymi, że liczba $km(k^2 - m^2)$ jest podzielna przez $k^3 - m^3$. Udowodnić, że $(k - m)^3 > 3km$.

Czas: 5 godzin

Czas na pytania: 45 minut

Za każde zadanie można otrzymać 8 punktów.

Kolejność zadań nie zależy od ich trudności.