



5. Srednjeevropska matematična olimpijada

POSAMIČNO TEKMOVANJE

3. SEPTEMBER 2011

Naloga I-1.

Na začetku je na tabli napisano le število 44. Če je na tabli napisano neko celo število a , ga lahko zamenjamo s štirimi paroma različnimi celimi števili a_1, a_2, a_3 in a_4 , tako da je njihova aritmetična sredina $\frac{1}{4}(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)$ enaka a . V vsakem koraku hkrati zamenjamo vsa števila na tabli na zgoraj opisan način. Po 30 korakih dobimo $n = 4^{30}$ celih števil b_1, b_2, \dots, b_n . Dokaži, da je

$$\frac{b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2}{n} \geq 2011.$$

Naloga I-2.

Naj bo $n \geq 3$ naravno število. Janez in Marija igrata naslednjo igro: Najprej Janez označi stranice pravilnega n -kotnika s števili $1, 2, \dots, n$ v kakršnem koli vrstnem redu želi, pri čemer uporabi vsako število natanko enkrat. Nato Marija razdeli n -kotnik na trikotnike, tako da nariše $n - 3$ diagonale, ki se ne sekajo znotraj n -kotnika. Vse te diagonale označi s številom 1. Nato v vsakega izmed trikotnikov napiše produkt števil, s katerimi so označene njegove stranice. Naj bo S vsota teh $n - 2$ produktov.

Poišči vrednost števila S , če Marija želi, da je S čim manjši, Janez želi, da je S čim večji, oba pa igrata najboljše možno.

Naloga I-3.

Krožnici \mathcal{K}_1 in \mathcal{K}_2 s središčema I_1 in I_2 se sekata v točkah A in B . Denimo, da je kot $\angle I_1 A I_2$ topi. Tangenta na \mathcal{K}_1 v točki A seka \mathcal{K}_2 še v točki C , tangenta na \mathcal{K}_2 v točki A pa seka \mathcal{K}_1 še v točki D . Naj bo \mathcal{K}_3 trikotniku BCD očrtana krožnica in naj bo E razpolovišče tistega loka CD krožnice \mathcal{K}_3 , na katerem leži točka B . Premici AC in AD sekata krožnico \mathcal{K}_3 zaporedoma še v točkah K in L . Dokaži, da je premica AE pravokotna na premico KL .

Naloga I-4.

Naj bosta k in m taki naravni števili, da je $k > m$ in da je število $km(k^2 - m^2)$ deljivo s $k^3 - m^3$. Dokaži, da je $(k - m)^3 > 3km$.

Čas: 5 ur

Čas za vprašanja: 45 min

Vsaka naloga je vredna 8 točk.

Vrstni red nalog ni odvisen od njihove težavnosti.