5th MIDDLE EUROPEAN MATHEMATICAL OLYMPIAD
VARAŽDIN 2011 CROATIA

language : French

5. Olympiade de Mathématiques d'Europe Centrale

Compétition par équipe

4. Septembre 2011

Problème T-1.
Trouver toutes les fonctions $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que :

$$y^2 f(x) + x^2 f(y) + xy = xy f(x+y) + x^2 + y^2$$

pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, où $\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres réels.

Problème T-2.
Soit a, b, c des nombres réels positifs tels que

$$\frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c} = 2.$$

Prouver que

$$\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}{2} \geqslant \frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{c}}.$$

Problème T-3.
Pour un entier $n \geq 3$, soit $\mathcal{M}$ l'ensemble $\{(x,y) \mid x, y \in \mathbb{Z},\, 1 \leq x \leq n, 1 \leq y \leq n\}$ formé de points du plan. ($\mathbb{Z}$ est l'ensemble des entiers.)

Quel est le nombre maximal de points que peut posséder un sous-ensemble $S \subseteq \mathcal{M}$ qui ne contient pas trois points distincts formant les sommêts d'un triangle rectangle ?

Problème T-4.
Soit $n \geq 3$ un entier. Dans une compétition semblable à la MEMO, il y a $3n$ participants, il y a n langues parlées, et chaque participant parle exactement trois langues différentes.

Prouver qu'au moins $\left\lceil \frac{2n}{9} \right\rceil$ des langues parlées peuvent être choisies de manière à ce qu'aucun participant ne parle plus que deux des langues choisies.

($\lceil x \rceil$ est le plus petit entier supérieur ou égal à x.)

Problème T-5.
Soit $ABCDE$ un pentagone convexe dont les cinq côtés ont la même longueur. Les diagonales AD et EC se coupent en S et on suppose $\angle ASE = 60°$. Prouver que $ABCDE$ possède une paire de côtés parallèles.

Problème T-6.
Soit ABC un triangle dont tous les angles sont aigus. Soit B_0 et C_0 les pieds des hauteurs issues de B et C, respectivement. Soit X un point à l'intérieur du triangle ABC tel que la droite BX soit tangente au cercle circonscrit du triangle AXC_0 et la droite CX soit tangente au cercle circonscrit du triangle AXB_0. Montrer que la droite AX est perpendiculaire à la droite BC.

Problème T-7.
Soit A et B des ensembles disjoints non-vides tels que $A \cup B = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$. Montrer qu'il existe des éléments $a \in A$ et $b \in B$ tels que le nombre $a^3 + ab^2 + b^3$ est divisible par 11.

Problème T-8.
Un entier positif n est appelé *surprenant* s'il existe des entiers positifs a, b, c tels que l'égalité suivante est satisfaite :

$$n = (b, c)(a, bc) + (c, a)(b, ca) + (a, b)(c, ab)$$

Prouver qu'il existe 2011 entiers positifs consécutifs qui sont *surprenants*.
((m, n) représente le plus grand diviseur commun des entiers positifs m et n.)

Durée: 5 heures
Temps pour les questions: 45 min
Chaque problème vaut 8 points.
L'ordre des problèmes ne dépend pas de leur difficulté.