5th MIDDLE EUROPEAN MATHEMATICAL OLYMPIAD
VARAŽDIN 2011 CROATIA

language: German

5. Mitteleuropäische Mathematik-Olympiade

Mannschaftswettbewerb

4. September 2011

Aufgabe T-1.
Man bestimme alle Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sodass

$$y^2 f(x) + x^2 f(y) + xy = xyf(x+y) + x^2 + y^2$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt, wobei $\mathbb{R}$ die Menge der reellen Zahlen ist.

Aufgabe T-2.
Seien a, b und c positive reelle Zahlen mit

$$\frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c} = 2.$$

Man zeige, dass

$$\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}{2} \geqslant \frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{c}}$$

gilt.

Aufgabe T-3.
Für eine ganze Zahl $n \geq 3$ sei $\mathcal{M}$ die Menge $\{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{Z},\, 1 \leq x \leq n, 1 \leq y \leq n\}$ von Punkten in der Ebene. ($\mathbb{Z}$ ist die Menge der ganzen Zahlen.)

Was ist die größtmögliche Anzahl von Punkten in einer Teilmenge $S \subseteq \mathcal{M}$, die keine drei paarweise verschiedenen Punkte enthält, die Eckpunkte eines rechtwinkligen Dreiecks sind?

Aufgabe T-4.
Sei $n \geq 3$ eine ganze Zahl. Bei einem MEMO-ähnlichen Wettbewerb gibt es $3n$ Teilnehmer. Es werden n Sprachen gesprochen, und jeder Teilnehmer spricht genau drei verschiedene Sprachen. Man zeige, dass es möglich ist, mindestens $\left\lceil \frac{2n}{9} \right\rceil$ der gesprochenen Sprachen so auszuwählen, dass kein Teilnehmer mehr als zwei der ausgewählten Sprachen spricht.

($\lceil x \rceil$ ist die kleinste ganze Zahl größer oder gleich x.)

Aufgabe T-5.
Sei $ABCDE$ ein konvexes Fünfeck, dessen Seiten alle dieselbe Länge haben. Die Diagonalen AD und EC schneiden einander in S mit $\angle ASE = 60°$. Man zeige, dass $ABCDE$ ein Paar paralleler Seiten besitzt.

Aufgabe T-6.
Sei ABC ein spitzwinkliges Dreieck. Seien B_0 und C_0 die Fußpunkte der Höhen von B bzw. C. Sei X ein Punkt im Inneren des Dreiecks ABC, sodass die Gerade BX eine Tangente an den Umkreis von AXC_0 ist, und die Gerade CX eine Tangente an den Umkreis von AXB_0 ist. Man zeige, dass die Gerade AX senkrecht zu BC ist.

Aufgabe T-7.
Seien A und B disjunkte nichtleere Mengen mit $A \cup B = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$. Man zeige, dass Elemente $a \in A$ und $b \in B$ existieren, sodass die Zahl $a^3 + ab^2 + b^3$ durch 11 teilbar ist.

Aufgabe T-8.
Wir nennen eine positive ganze Zahl n *erstaunlich*, falls positive ganze Zahlen a, b und c existieren, sodass

$$n = \mathrm{ggT}(b, c) \cdot \mathrm{ggT}(a, bc) + \mathrm{ggT}(c, a) \cdot \mathrm{ggT}(b, ca) + \mathrm{ggT}(a, b) \cdot \mathrm{ggT}(c, ab)$$

gilt. Man zeige, dass 2011 aufeinanderfolgende positive ganze Zahlen existieren, die erstaunlich sind.
(Mit $\mathrm{ggT}(m, n)$ bezeichnen wir den größten gemeinsamen Teiler der Zahlen m und n.)

Arbeitszeit: 5 Stunden
Fragezeit: 45 min
Bei jeder Aufgabe können 8 Punkte erreicht werden.
Die Reihenfolge der Aufgaben hängt nicht von deren Schwierigkeit ab.