5th MIDDLE EUROPEAN MATHEMATICAL OLYMPIAD
VARAŽDIN 2011 CROATIA

language: Hungarian

5^{th} Middle European Mathematical Olympiad

Csapatverseny

2011. szeptember 4.

T-1. feladat
Határozzuk meg az összes olyan $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt, melyre tetszőleges $x, y \in \mathbb{R}$ esetén

$$y^2 f(x) + x^2 f(y) + xy = xyf(x+y) + x^2 + y^2,$$

ahol $\mathbb{R}$ a valós számok halmazát jelöli.

T-2. feladat
Legyenek a, b, c olyan pozitív valós számok, melyekre

$$\frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c} = 2.$$

Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}{2} \geqslant \frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{c}}.$$

T-3. feladat
Egy $n \geq 3$ egészre az $\{(x,y) \mid x, y \in \mathbb{Z},\ 1 \leq x \leq n, 1 \leq y \leq n\}$ síkbeli halmazt $\mathcal{M}$-mel jelöljük, ahol $\mathbb{Z}$ az egész számok halmaza.

Legfeljebb mekkora lehet a számossága egy olyan $S \subseteq \mathcal{M}$ részhalmaznak, ami nem tartalmaz három, derékszögű háromszöget meghatározó pontot?

T-4. feladat

Legyen $n \geq 3$ egész szám. Egy MEMO-hoz hasonló versenyen részt vevő $3n$ diák összesen n különböző nyelvet beszél, mindegyikük pontosan hármat.

Mutassuk meg, hogy a beszélt nyelvek közül kiválasztható legalább $\left\lceil \frac{2n}{9} \right\rceil$ darab olyan módon, hogy a kiválasztott nyelvek közül kettőnél többet semelyik diák se beszéljen.

($\lceil x \rceil$ a legkisebb egész szám, amely nagyobb vagy egyenlő, mint x.)

T-5. feladat

Az $ABCDE$ konvex ötszögnek minden oldala ugyanolyan hosszú. Az AD és EC átlók olyan S pontban metszik egymást, melyre $ASE\sphericalangle = 60°$. Bizonyítsuk be, hogy az $ABCDE$ ötszögnek van két párhuzamos oldala.

T-6. feladat

Legyen ABC egy hegyesszögű háromszög. Jelölje B_0 illetve C_0 a B illetve C csúcsból induló magasságvonal talppontját. Legyen X az ABC háromszög belsejében olyan pont, melyre a BX egyenes érinti az AXC_0 háromszög körülírt körét, valamint a CX egyenes érinti az AXB_0 háromszög körülírt körét. Mutassuk meg, hogy az AX egyenes merőleges a BC egyenesre.

T-7. feladat

Legyenek A és B olyan diszjunkt nemüres halmazok, melyekre $A \cup B = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$. Mutassuk meg, hogy léteznek $a \in A$ és $b \in B$ elemek úgy, hogy $a^3 + ab^2 + b^3$ osztható 11-gyel.

T-8. feladat

Egy n pozitív egészt *csodálatos*nak nevezünk, ha léteznek olyan a, b, c pozitív egészek, melyekre

$$n = (b, c)(a, bc) + (c, a)(b, ca) + (a, b)(c, ab)$$

teljesül. Bizonyítsuk be, hogy létezik 2011 egymást követő pozitív egész, melyek mindegyike csodálatos.
(Az m és n pozitív egészek legnagyobb közös osztóját (m, n) jelöli.)

A feladatok megoldására 5 óra áll rendelkezésre.
Kérdéseket az első 45 percben lehet feltenni.
Minden feladat 8 pontot ér.
A feladatok nem nehézségi sorrendben vannak.