5th MIDDLE EUROPEAN MATHEMATICAL OLYMPIAD
VARAŽDIN 2011 CROATIA

language: Slovak

5. ročník Stredoeurópskej matematickej olympiády

Súťaž družstiev

4. september, 2011

Úloha T-1.
Nájdite všetky funkcie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ také, že rovnosť

$$y^2 f(x) + x^2 f(y) + xy = xyf(x+y) + x^2 + y^2$$

platí pre všetky dvojice $x, y \in \mathbb{R}$, pričom $\mathbb{R}$ je množina všetkých reálnych čísel.

Úloha T-2.
Nech a, b, c sú kladné reálne čísla spĺňajúce rovnosť

$$\frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c} = 2.$$

Dokážte, že

$$\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}{2} \geq \frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{c}}.$$

Úloha T-3.
Pre celé číslo $n \geq 3$ označme $\mathcal{M}$ množinu $\{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{Z}, 1 \leq x \leq n, 1 \leq y \leq n\}$ pozostávajúcu z bodov roviny. (Symbol $\mathbb{Z}$ označuje množinu celých čísel.)

Aký je najväčší možný počet prvkov podmnožiny $S \subseteq \mathcal{M}$, ktorá neobsahuje žiadne tri body ležiace vo vrcholoch pravouhlého trojuholníka?

Úloha T-4.

Nech $n \geq 3$ je prirodzené číslo. Súťaže podobnej MEMO sa zúčastnilo $3n$ účastníkov, ktorí dokopy hovoria n rôznymi jazykmi. Každý účastník ovláda práve tri z týchto jazykov. Dokážte, že vieme vybrať aspoň

$$\left\lceil \frac{2n}{9} \right\rceil$$

zo spomínaných n jazykov tak, aby žiadny účastník neovládal viac ako dva z nich.

(Symbol $\lceil x \rceil$ označuje najmenšie celé číslo, ktoré nie je menšie ako x.)

Úloha T-5.

Konvexný päťuholník $ABCDE$ má všetky strany rovnako dlhé. Uhlopriečky AD a EC sa pretínajú v bode S tak, že $|\measuredangle ASE| = 60°$. Dokážte, že päťuholník $ABCDE$ má niektoré dve strany rovnobežné.

Úloha T-6.

Daný je ostrouhlý trojuholník ABC. Označme postupne B_0 a C_0 päty výšok z vrcholov B a C. Bod X leží vnútri trojuholníka ABC tak, že priamka BX sa dotýka kružnice opísanej trojuholníku AXC_0 a priamka CX sa dotýka kružnice opísanej trojuholníku AXB_0. Dokážte, že priamky AX a BC sú na seba kolmé.

Úloha T-7.

Nech A a B sú disjunktné neprázdne množiny také, že $A \cup B = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$. Dokážte, že existujú prvky $a \in A$ a $b \in B$ také, že číslo $a^3 + ab^2 + b^3$ je deliteľné 11.

Úloha T-8.

Kladné celé číslo n nazveme *úžasným*, ak existujú kladné celé čísla a, b, c spĺňajúce rovnosť

$$n = (b, c)(a, bc) + (c, a)(b, ca) + (a, b)(c, ab).$$

Dokážte, že existuje 2011 po sebe idúcich kladných celých čísel, ktoré sú úžasné.

(Symbolom (m, n) označujeme najväčšieho spoločného deliteľa kladných celých čísel m a n.)

Čas na riešenie: 5 hodín
Čas na otázky: 45 minút
Za každú úlohu je možné získať najviac 8 bodov.
Poradie úloh nezávisí od ich obtiažnosti.